Conclusion : $U_n > \sqrt{5}$; $\forall n \in IN \Rightarrow U_{n+1} > \sqrt{5}$ **(1)**

* $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{5}{U_n}\right) - U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{U_n} - U_n\right)$

$= \frac{5-U_n^2}{2U_n} = \frac{(\sqrt{5}-U_n)(\sqrt{5}+U_n)}{2U_n}$

$U_n > \sqrt{5}$ d'où : $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ est strictement décroissante

Par suite : $U_{n+1} < U_n \leq U_0 \Rightarrow U_{n+1} < U_n \leq 3$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow \sqrt{5} < U_{n+1} < U_n \leq 3$

b) (U_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{5}$, elle est donc convergente.

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$\sqrt{5} < U_n \leq 3 \Rightarrow \ell \in [\sqrt{5},3]$

$U_{n+1} = f(U_n)$; f est continue sur $[\sqrt{5},3]$ d'où : $\ell = f(\ell)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{5}{\ell}\right) = \ell \Leftrightarrow \ell + \frac{5}{\ell} = 2\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{5}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 5 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{5}$

Comme $\ell \geq \sqrt{5}$; conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{5}$

EXERCICE№20

1) $\begin{cases} U_n = \frac{2}{n} \\ \mathcal{V}_n = -\frac{3}{n} \end{cases}$ $n \geq 2$

$n \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ d'où : $\frac{2}{n} \geq \frac{2}{n+1}$ et $-\frac{3}{n} \leq -\frac{3}{n+1}$

$\Rightarrow U_n \geq U_{n+1}$ et $\mathcal{V}_n \leq \mathcal{V}_{n+1}$

(U_n)est décroissante et $(\mathcal{V}_n)$ est croissante

Et on a : $\mathcal{V}_n \leq U_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - \mathcal{V}_n = 0$

conclusion : (U_n) et $(\mathcal{V}_n)$ sont adjacentes.

2)) $\begin{cases} U_n = \frac{n+2}{n-1} \\ \mathcal{V}_n = \frac{2n+3}{2n+5} \end{cases}$ $(n \geq 4)$

$U_n - \mathcal{V}_n = \frac{8n+13}{(2n+5)(n-1)} \geq 0$ d'où : $\mathcal{V}_n \leq U_n$

(U_n)est décroissante et $(\mathcal{V}_n)$ est croissante

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn